Introduzione

Spesso le tre famose leggi sul moto planetario dovute a Johannes Kepler (1571-1630) (qui raffigurato a Linz, Austria) sono spiegate in meccanica celeste in termini fisici rigorosi ma anche un po' astrusi, almeno per l'astrofilo dilettante. Vediamo di spiegarle in modo semplice, senza introdurre concetti fisici ma unicamente mediante l'intuizione di alcune leggi fenomenologiche.

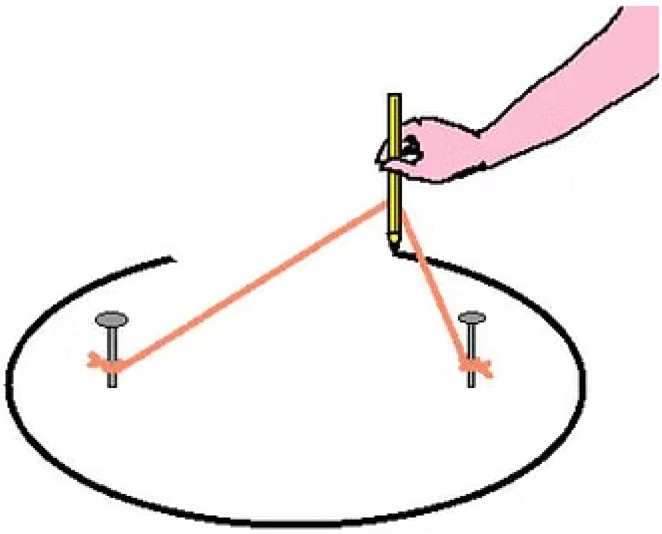
Kepler nacque infatti 25 anni prima di Renè Descartes (1596-1650, alias Cartesio), fondatore della geometria cartesiana e ben 72 anni prima di Isaac Newton (1643-1727) che spiegò più tardi le leggi di Kepler in base alla teoria gravitazionale ed al calcolo differenziale.

La prima ipotesi di Kepler fu che le orbite dei pianeti attorno al Sole (supposto fisso ed al centro del sistema solare) seguissero i punti di un'ellisse (e non di un cerchio perfetto). Vediamo quindi che tipo di curva è questa ellisse e quali sono le sue proprietà.

L'ellisse e le sue proprietà geometriche

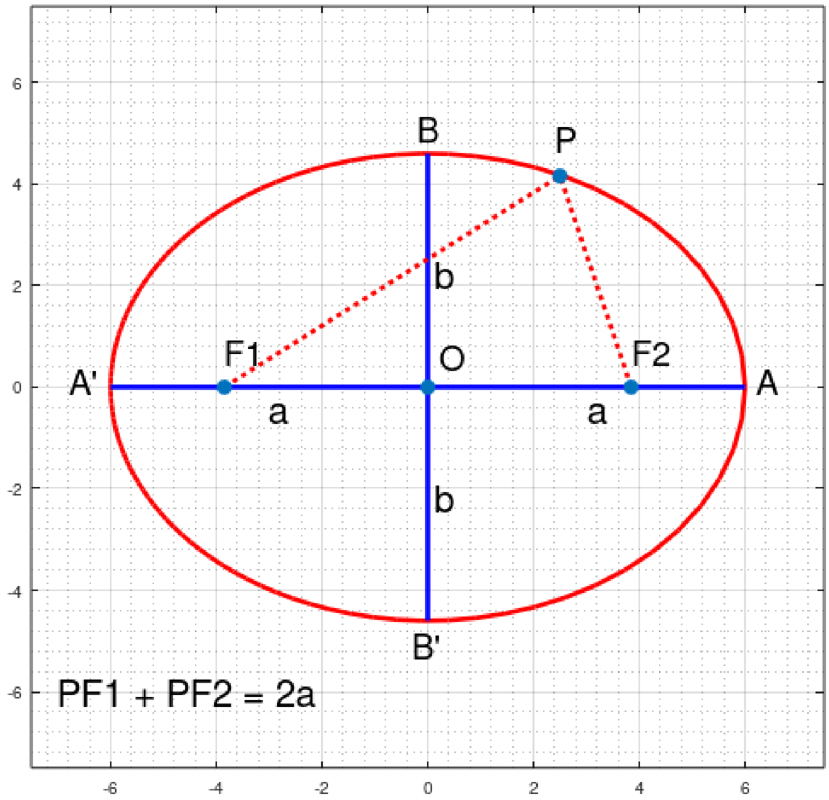
Per ogni punto di un'ellisse si ha che la somma delle distanze di questo punto da altri due punti interni all'ellisse, detti fuochi, è costante. In questo modo la si può disegnare fissando una cordicella a due punti fissi su un cartoncino e percorrendo il foglio tendendo la fune. E' il cosiddetto metodo del giardiniere.

L'ellissse disegnata con il metodo detto del 'giardiniere'. Esso viene infatti utilizzato per delimitare una aiuola ellittica in un giardino.



Il centro dell'ellisse si situa esattamente in mezzo ai due fuochi, o meglio a metà del segmento che congiunge i suddetti fuochi. L'ellisse è caratterizzata da due assi, il maggiore è *2a* (quello che attraversa i punti fissi) ed il minore *2b.*

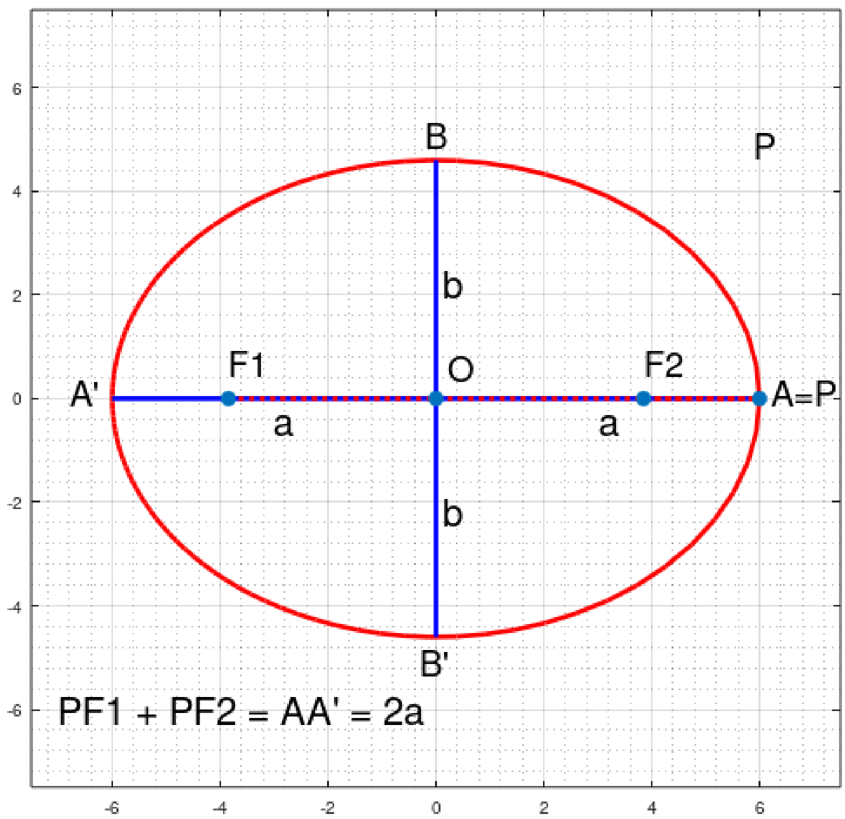
Ellisse con a = 6 e b = 4.6 quindi ecc = 0,641



Nella figura è tracciata un'ellisse avente :
a (semiasse maggiore,OA) = 6
b (semiasse minore,OB) = 4.6

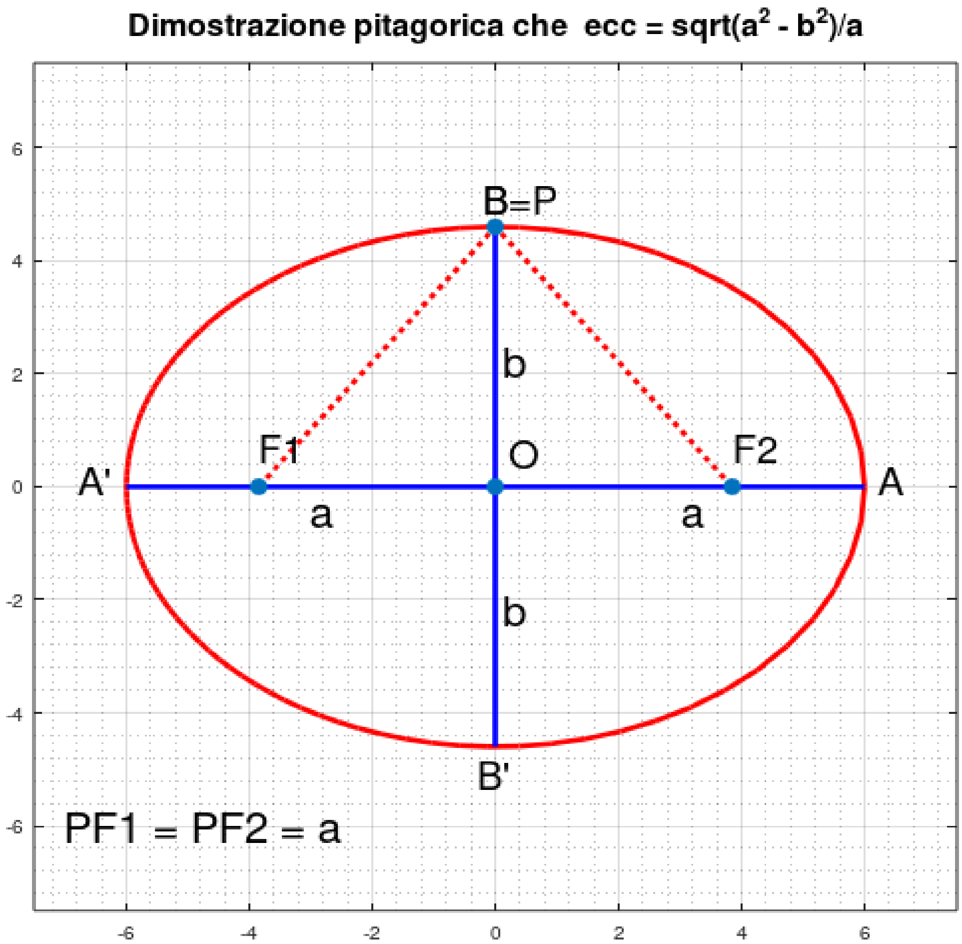
Se ritorniamo al metodo del giardiniere, troviamo che la lunghezza della cordicella è pari all'asse maggiore, ovvero due volte il semiasse maggiore 'a'.
E' intuitivo ciò dall'esame della figura seguente, dove il punto P che traccia la curva si è spostato fino a coincidere con A.

Dimostrazione che la lunghezza della fune è 2a=asse maggiore



La somma delle distanze del punto generico P sull'ellisse con i fuochi F1 ed F2 è pari a 12 (2 volte a) e cioè l'asse maggiore. L'asse minore vale 2b=9.2

Si può dimostrare facilmente che la distanza tra l'origine ed un fuoco (ad es. OF2) vale $\sqrt{a^2-b^2}$, ovvero OF1 = OF2 = $\sqrt{a^2-b^2}$
Se infatti il punto P si sposta andando a coincidere con B, l'estremo superiore del semiasse minore OB, con il teorema di Pitagora applicato al triangolo O-B-F2 si ha che :



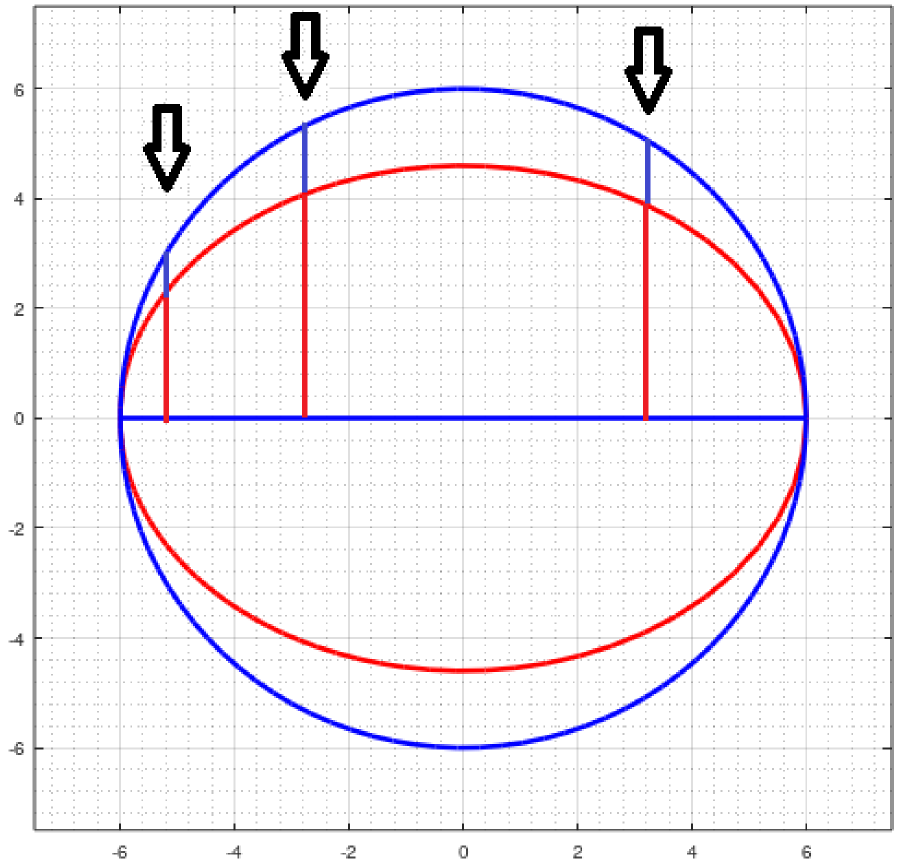
$(OF2)^2 = (PF2)^2 - (PO)^2$ (teorema di Pitagora) ma BF2 = a e BO = b, quindi si ottiene la relazione precedente.

Introduciamo ora un parametro molto importante, detto **eccentricità dell'ellisse , ε**. Esso è un valore che varia tra 0 (cerchio perfetto) e valori vicinissimi a 1. Quando diventa 1 l'ellisse diventa una parabola). Più l'eccentricità aumenta più essa si allunga. Per essere precisi, si definisce l'eccentricità come il rapporto tra la distanza di uno dei duo fuochi dal centro e il semiasse maggiore. Essa vale quindi nel nostro caso
ε = OF2 / a = 0,642

L'ellisse di Kepler non era quella del giardiniere.

L'ellisse orbitalica non veniva considerata da Kepler con il metodo del giardiniere, ovvero come luogo dei punti la cui somma delle distanza dai fuochi è costante, ma bensì come una circonferenza deformata in vericale. Il concetto di orbita circolare era evidentemente duro a morire, quidi ancora Kepler immaginave le orbite dei pianeti come cerchi in qualche modo perfetti, poi 'deformati' in qualche modo.

In effetti si può ottenere un'ellisse, come da figura sottostante, traslando i punti di una circonferenza, lungo un percorso verticale, di un certo rapporto, detto rapporto di compressione, inferiore a 1. Non confondiamo questo rapporto con l'eccentricità dell'ellisse.



Il cerchio blu (detto cerchio massimo) genera infatti l'ellisse rossa (in figura) diminuendo di un certo rapporto costante la distanza dall'asse maggiore (in blu) dei suoi punti. Nella figura il rapporto di compressione vale 0,77. Dimostreremo più sotto che il rapporto di compressione (*rc*) equivale a $\sqrt{(1-ec^2)}$ dove *ec* = eccentricità.
Nell'esempio in figura l'eccentricità vale 0,4 per cui *rc* = $\sqrt{(1-0,4^2)}$ = 0,77

Moto orbitalico e leggi di Keplero
Le leggi di Kepler sono tre leggi concernenti il movimento dei pianeti intorno al Sole. Sono il principale contributo di Kepler (1571–1630) all'astronomia e alla meccanica e furono formulate tra il 1608 ed il 1619.
L'astronomo tedesco le derivò studiando le osservazioni di un altro astronomo,Tycho Brahe, astronomo danese (1546-1601). Esse possono venire espresse come :

1) L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi (*legge delle orbite ellittiche*).

2) Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive (spazza) aree uguali in tempi uguali (*legge delle aree*). Questa legge deriva direttamente dal principio fisico della conservazione della *quantità di moto*.

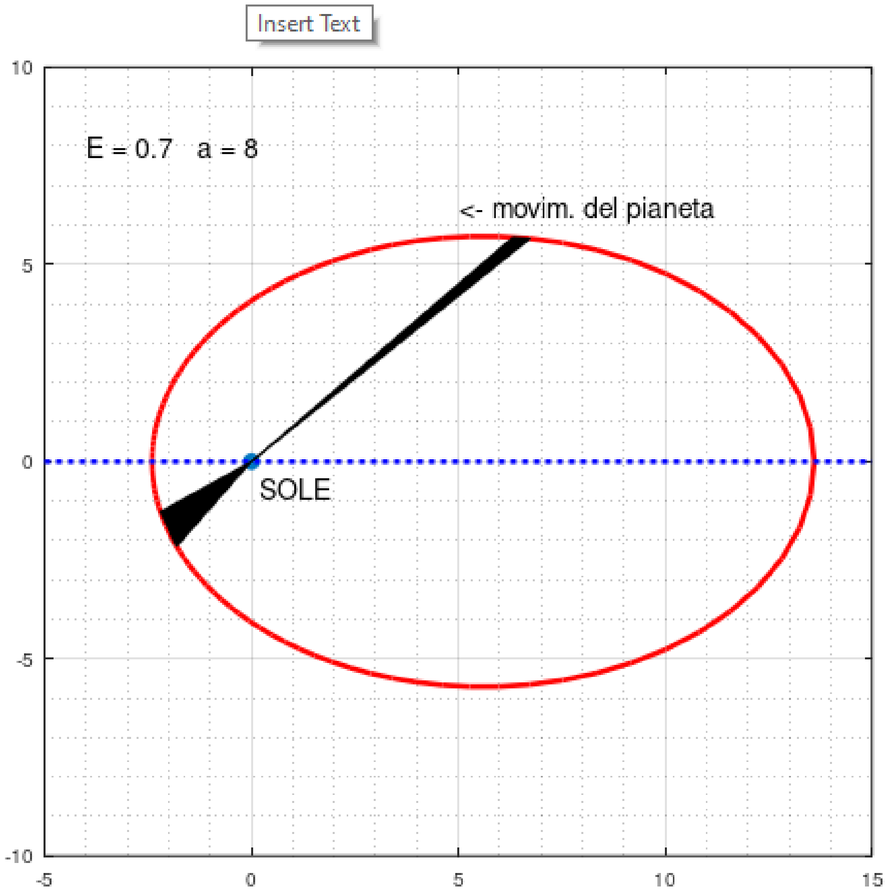
3) I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore (*legge dei periodi*).

Queste leggi sono applicabili a rigore solo se la massa del pianeta è trascurabile rispetto a quella della stella attorno a cui orbita, se si trascurano le interazioni tra pianeti ruotanti attorno allo stesso centro di attrazione.

D'altra parte le tre leggi di Keplero sono applicabili a qualunque corpo orbitante intorno ad un altro, per esempio ai satelliti artificiali che ruotano attorno alla terra. Non si applicano al problema dei tre corpi, come ad esempio alla Luna che orbita principalmente attorno alla Terra ma anche attorno al Sole in quanto risente dell'attrazione gravitazionale di entrambi i corpi.

Moto orbitalico di un pianeta attorno al Sole. In base alla seconda legge di Keplero le aree spazzate dalla congiungente pianeta.sole sono eguali nella stessa unità di tempo, quindi il pianeta si muove più lentamente quando è distante dal fuoco F1(Sole)

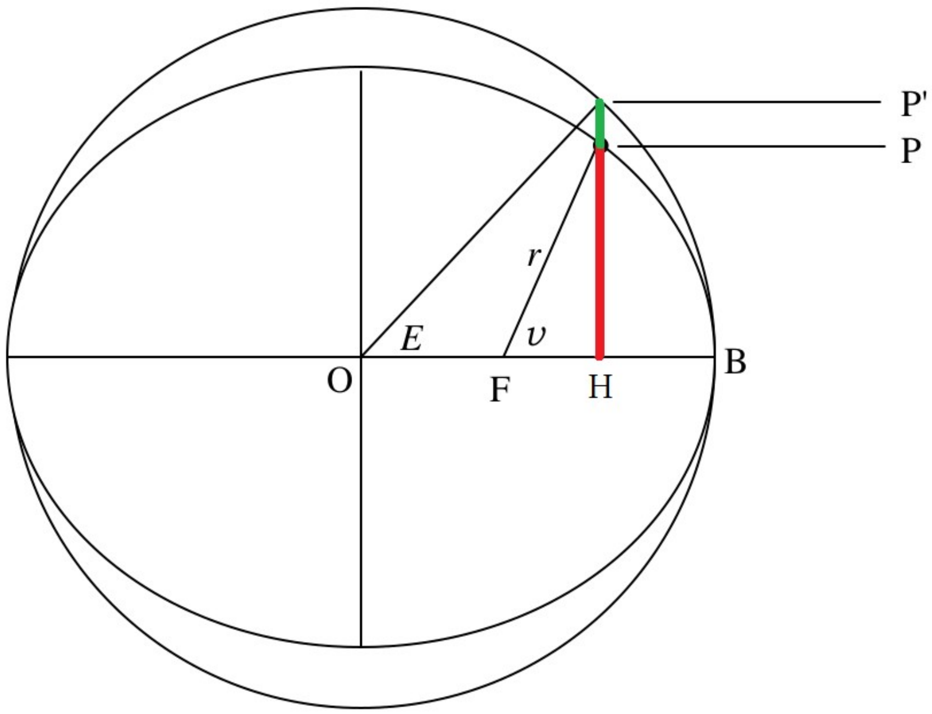
La figura è volutamente esagerata, avendo un'eccentricità di 0,7 . Quelle dell'orbita terrestre ad esempio vale 0,016



Derivazione semplice della seconda legge di Kepler

Viene definita in un'ellisse l'eccentricità *ec* come il rapporto tra la distanza dal centro di uno dei due fuochi (OF) ed il semiasse maggiore dell'ellisse (OB). Quest'ultimo corrisponde anche al raggio del cerchio circoscritto alla stessa ellisse (cerchio massimo). Partendo dal cerchio massimo, di raggio **OB = a** ,il fattore di compressione $\sqrt{(1-ec^2)}$ determina i punti sull'ellisse. Se P' è sul cerchio generatore, la sua ordinata **P'H** (rosso+verde) moltiplicata per il fattore di compressione $\sqrt{(1-ec^2)}$ ci fornisce la lunghezza del segmento **PH** (rosso), ovvero l'ordinata di P che giace sull'ellisse.

Fig.1 Generazione di un'ellisse da un cerchio di raggio OB

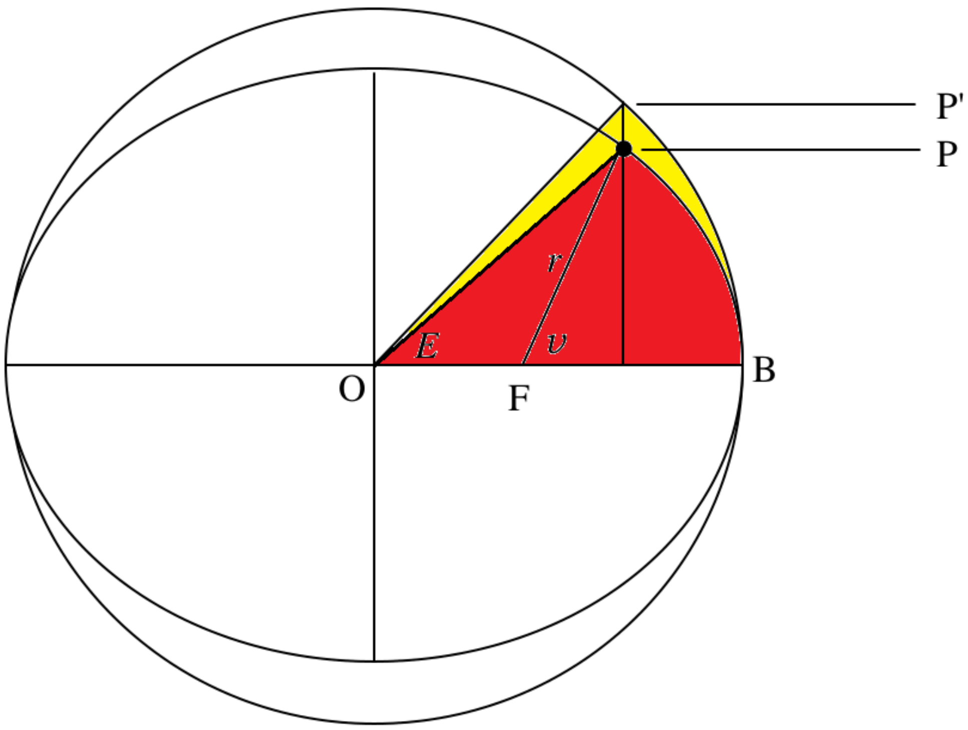


$$\frac{PH}{P'H}=\sqrt{(1-ec^2)}$$
$$PH=PH'\sqrt{(1-ec^2)}$$

Ne deriva che anche il rapporto tra l'area del settore di ellisse **OBP** in **rosso** e l'area del settore di cerchio **OBP'** in **giallo+rosso** è pari al rapporto di compressione $\sqrt{(1-ec^2)}$, ovvero

$$\frac{(OBP)}{(OBP')}=\sqrt{(1-ec^2)}$$

Fig.2 Rapporto tra aree di settori (circolare ed ellittico)



Se il raggio del cerchio massimo, **OB** , viene posto pari ad **a = semiasse maggiore** la superficie del cerchio massimo sarà **πa²** e l'area del settore circolare OBP' (giallo+rosso) sarà pari a questa superficie per il rapporto E/360° dove **E = anomalia eccentrica** è pari all'angolo POB ed è a sua volta funzione, per ora incognita, t.
Ne consegue che l'area OBP (rosso) sarà :

$$(OBP)=(OBP')\cdot\sqrt{(1-ec^2)}=E/360\cdot\pi\cdot a^2\cdot\sqrt{(1-ec^2)}$$

Essendo la distanza tra il centro dell'ellisse O ed il fuoco F pari al semiasse maggiore moltiplicato per l'eccentricità, ovvero

$OF = a \cdot ec$ ed inoltre $PH = P'H \cdot \sqrt{(1-ec^2)}$ e per la trigonometria $P'H = a \cdot \sin(E)$

si potrà calcolare l'area del segmento di ellisse FBP (arancione) come area OBP - area triangolo OFP, dove l'area del triangolo OFP sarà il semiprodotto della base OF per l'altezza PH.

$$(OFP) = \frac{1}{2} \cdot OF \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot a \cdot ec \cdot a \cdot sin(E) \cdot \sqrt{(1-ec^2)} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot ec \cdot sin(E) \cdot \sqrt{(1-ec^2)}$$

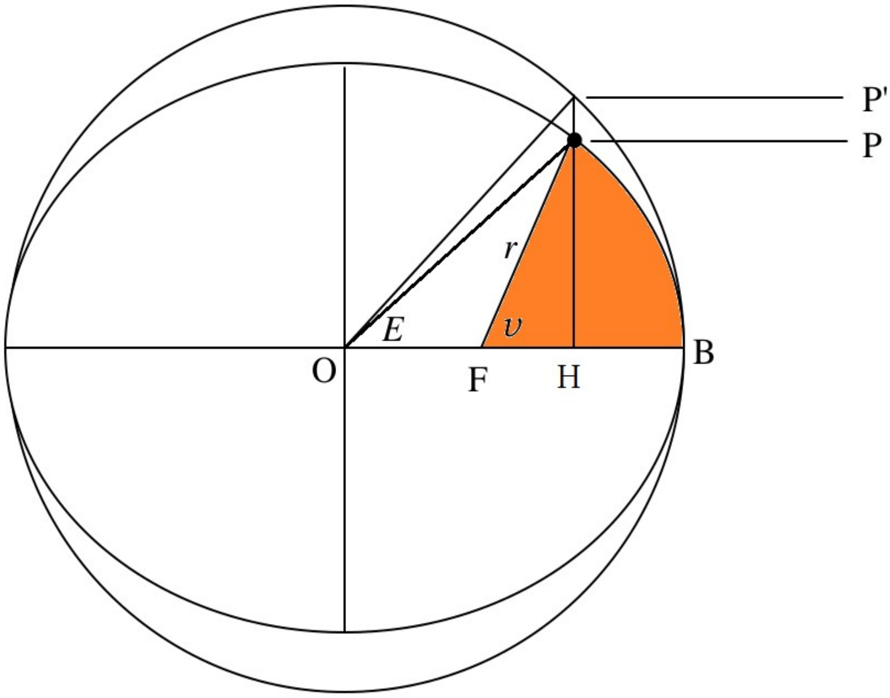
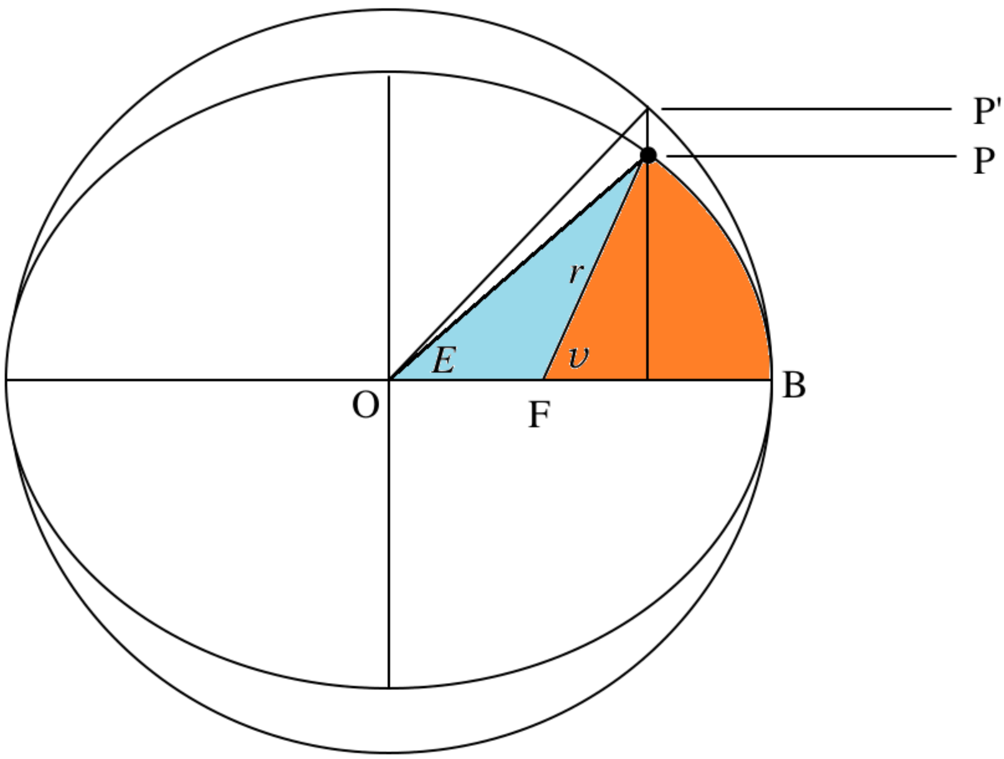


Fig.3 Calcolo dell'area del settore ellittico PFB

Quindi l'area del settore ellittico FBP (arancione) sarà pari all' area OBP meno l'area del triangolo OFP (azzurro) , ovvero in formula

Fig.4 Calcolo dell'area del settore ellittico (arancione)



raccogliendo a fattor comune $\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{(1-ec^2)}$ si ottiene infine :

$$(FPB) = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{(1-ec^2)} \cdot [\frac{\pi \cdot E}{180} \text{ - } ec \cdot sin(E)]$$

Fino a qui pura geometria, ma ora Kepler propone la sua **geniale intuizione** sul movimento ellittico dei un pianeta. L'area (FBP) in arancione è proporzionale (seconda legge di Kepler) al tempo (t-t0) trascorso dal perielio (t0, punto B) . Quando il tempo t – t0 è pari a T (periodo di rivoluzione del pianeta) l'area (FBP) sarà pari a tutta l'area dell'ellisse, ovvero se t-t0 = T, allora $(FBP) = \pi a^2 \sqrt{(1-ec^2)}$. Possiamo quindi impostare una semplice proporzione

$$(FBP)(t) : \pi a^2 \sqrt{(1-ec^2)} = (t - t0) : T \quad \text{ovvero}$$

$$(FBP)(t) = \pi a^2 \sqrt{(1-ec^2)} \cdot \frac{(t-t0)}{T}$$

Ricordiamo che l'area totale dell'ellise è data dall'area del cerchio massimo per il rapporto di compressione.

Eguagliando le due espressioni di FBP si ottiene infine :

$$\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{(1-ec^2)} \cdot [\frac{\pi \cdot E}{180} \text{ - } ec \cdot sin(E)] = \pi a^2 \sqrt{(1-ec^2)} \cdot \frac{(t-t0)}{T} \quad \text{semplificando:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot [\frac{\pi \cdot E}{180} \text{ - } ec \cdot sin(E)] = \pi \cdot \frac{(t-t0)}{T}$$

Ora moltiplico entrambi i membri per $\frac{360}{\pi}$ ed ottengo

$$E \text{ - } \frac{180}{\pi} \cdot ec \cdot sin(E) = 360 \cdot \frac{t-t0}{T}$$

Quest'ultima è la **famosa equazione di Kepler (Johannes Kepler, 1609)**.

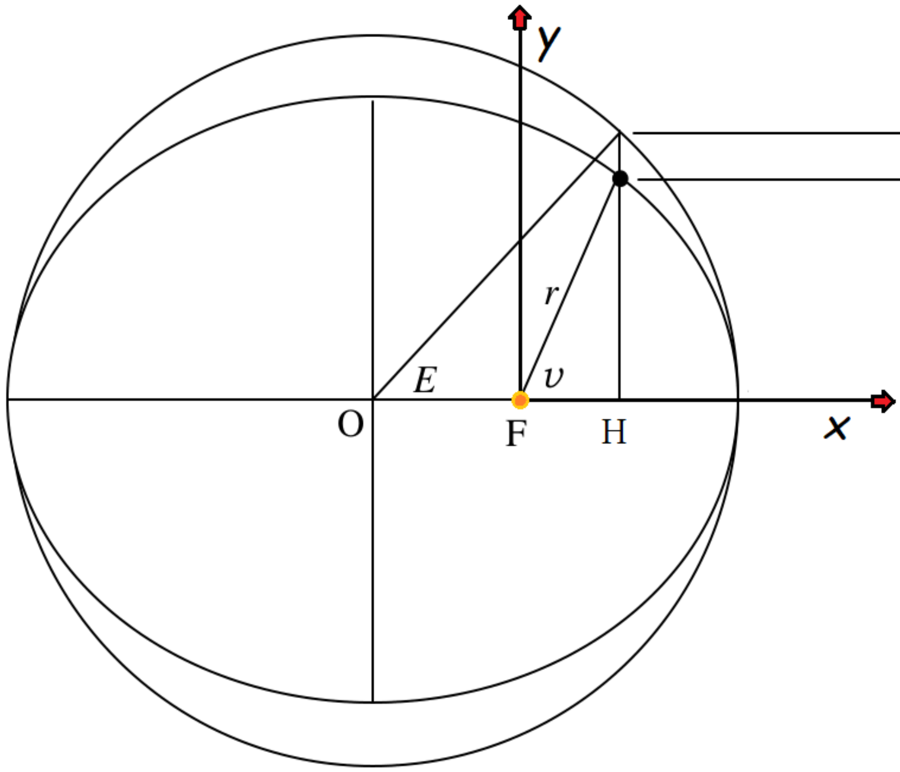
Essa non si puo risolvere analiticamente ma soltanto con metodi iterativi, ovvero con approssimazioni successive. L'anomalia eccentrica E viene misurata in gradi sessagesimali e non in radianti, almeno in questa ultima formula.

Il secondo termine dell'equazione viene spesso indicato come Anomalia Media (Mean Anomaly, MA); risulta quindi :

$$MA = 360 \cdot \frac{t-t0}{T}$$

Nei calcoli di meccanica celeste spesso risulta utile conoscere le coordinate del pianeta in un sistema centrato sul fuoco F (sistema eliocentrico nel sistema solare). Avendo risolto l'equazione di Kepler e trovato E, le coordinate cartesiane ortogonali di P, $x(P), y(P)$ possono essere ricavate in base ad alcune semplici considerazioni trigonometriche.

Fig. 5 Coordinate cartesiane del pianeta P nel sistema eliocentrico



$$x(P) = FH = OH - OF = a \cdot cos(E) - a \cdot ec = a(\cos(E) - ec)$$
$$y(P) = PH = P'H \cdot \sqrt{(1-ec^2)} = a \cdot sin(E) \cdot \sqrt{(1-ec^2)}$$

Applicazione al sistema Terra-Sole

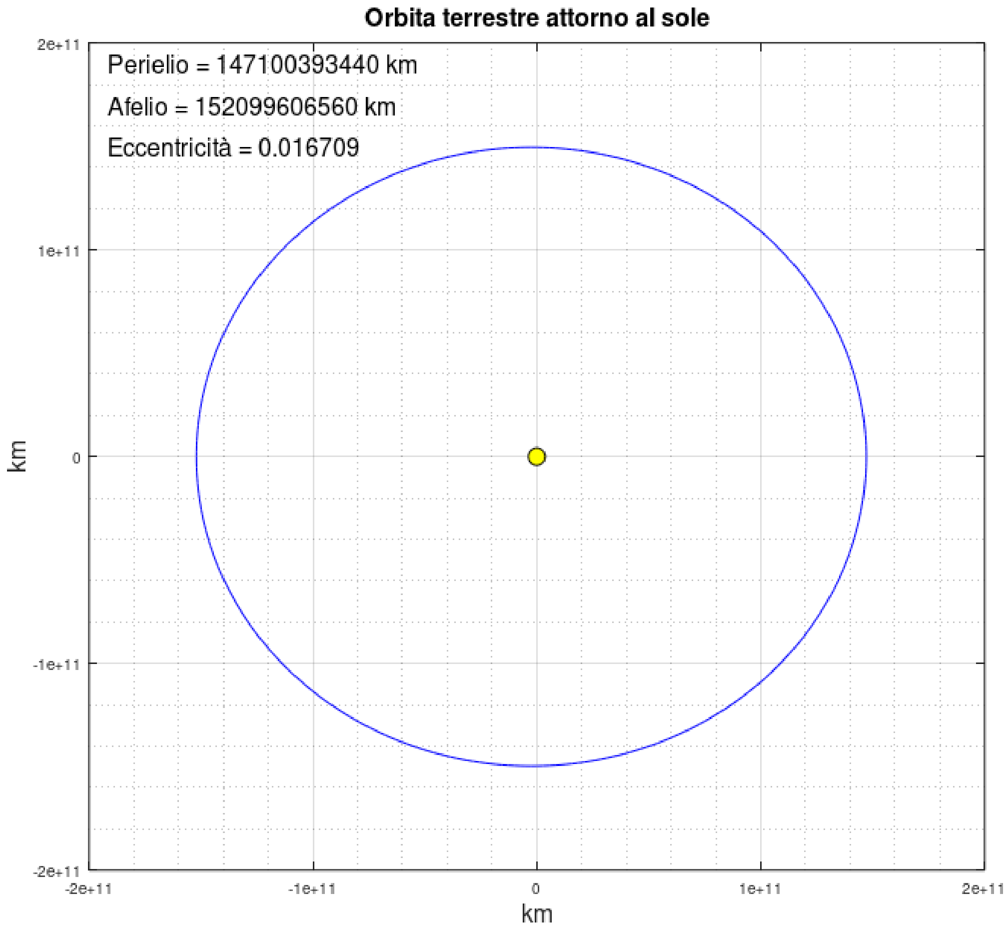
A titolo di esempio calcoliamo (*) la posizione della Terra in un sistema eliocentrico di coordinate cartesiane, con uno step di 1/360 di anno (circa 1 giorno). L'equazione di Kepler viene risolta attraverso la funzione $fsolve()$ che trova lo zero della funzione

```
y = Eca - 180/pi*ecc1*sind(Eca) - MA
```

dove Eca è l'anomalia eccentrica ed MA quella media.
Una volta nota l'anomalia eccentrica (E), vengono calcolate le coordinate x(P) e y(P) e la loro variazione durante lo step di calcolo. Quindi si deducono l'energia cinetica (Ec) e il potenziale gravitazionale (U) della Terra, illustrandone il continuo interscambio a parità di energia totale (potenziale + cinetica). Infine viene calcolata la TSI (Total Solar Irradiance) durante una rivoluzione terrestre attorno al Sole assumendo dai dati sperimentali un'irraggiamento medio pari a 1361.5 watt/m^2 (al di sopra dell'atmosfera terrestre).

(*) Il programma ed il relativo script si trovano, per i più curiosi, QUI

Fig.6a
Prima grafica dello script precedente. Le distanze sono espresse in metri.



Come secondo esempio applicativo dell'equazione di Kepler calcoliamo il bilancio energetico-meccanico di un corpo celeste (di massa m) orbitante attorno ad un corpo centrale di massa M , dove sia M>>m.
Se l'orbita è perfettamente circolare $ec = 0$, la velocità del pianeta è costante così come la sua energia cinetica $Ec = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. L'energia potenziale del pianeta è anche costante, essendo espressa da $U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}$ dove G = costante gravitazionale universale = 6,67e-11 $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$ ed r è la distanza tra i due corpi di massa m ed M per un'orbita circolare è costante.
Se l'orbita è ellittica avviene un continuo trasferimento di energia cinetica↔potenziale, mantenendo la somma delle due costante. L'analogia più semplice è con un pendolo, quando raggiunge il punto morto superiore, la sua velocità si azzera, e quindi anche la sua energia cinetica, dopodiche riprende ad accelerare fino a quando nel punto più basso la sua energia cinetica è massima e quella potenziale minima. Anche qui la somma delle due è costante.
L'esempio seguente si riferisce alla Terra attorno al Sole. Dovendo usare le unità di misura SI (Sistema Internazionale) ovvero metri, secondi, Newton, Joule e kilogrammi, i numeri sono molto grandi. Il periodo è un anno.

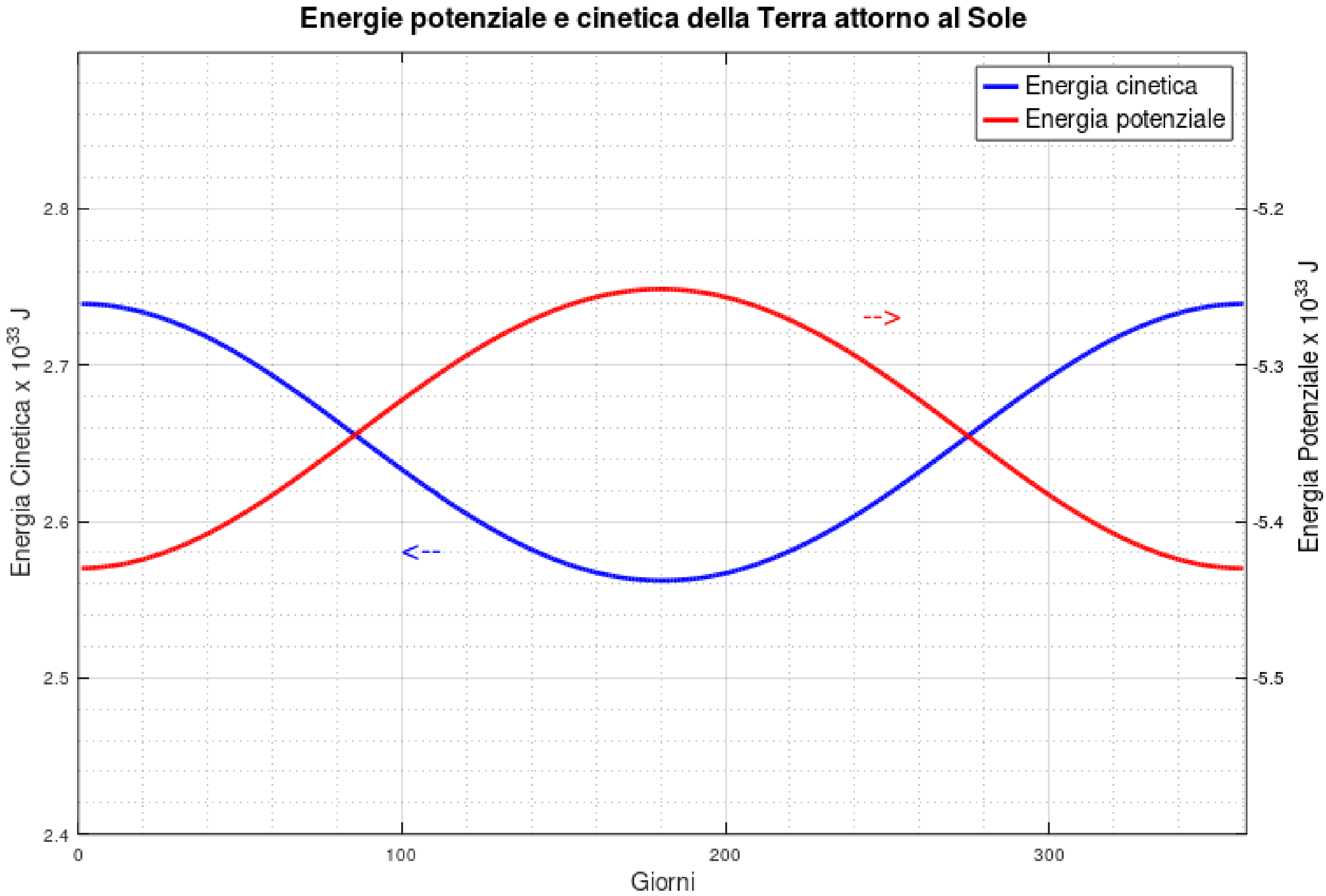


Fig. 6b Seconda grafica dello script : andamento ed interscambio energia potenziale ↔ cinetica durante l'orbita terrestre

I giorni partono dal perielio (3 gennaio nel 2024) dove l'energia cinetica è massima e quella potenziale minima. All'afelio i ruoli si invertono, la velocità è minima, così come l'energia cinetica mentre si ha un massimo di energia potenziale (sempre con il segno negativo, essendo il suo zero a distanza infinita).

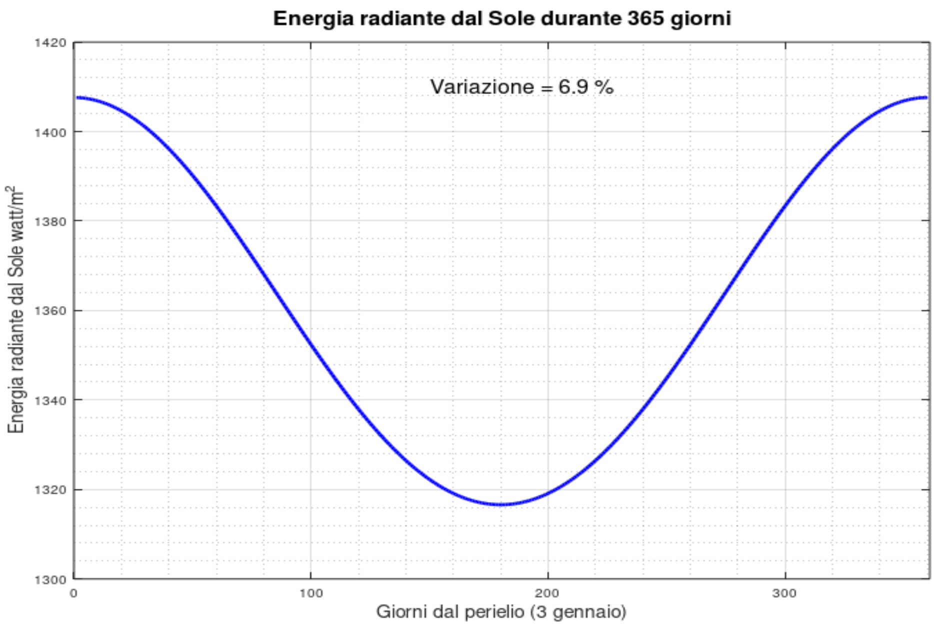


Fig. 6c Terzo grafico dello script : variazione della TSI (Total Solar Irradiance al confine esterno dell'atmosfera terrestre) nei vari giorni dell'anno a partire dal perielio (3 gennaio)